Test di Algebra Lineare

venerdì 18 novembre 2016

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + hy + t = 4 \\ (h+4)x + y - z + 3(h+2)t = h+5 \\ (h+2)x - 5y + z - ht = 5 \end{cases}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

(a) Si discuta, al variare di h, la risolubilità del sistema lineare, precisando il numero di soluzioni quando esso è compatibile. $\boxed{4}$

(b) Posto $h = -2$, si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema. $\boxed{3}$

(c) Si dica se S è uno spazio vettoriale, motivando la risposta; in ogni caso si determinino una base e la dimensione di $U =< S >$. $\boxed{3}$

(d) Si determinino una base e la dimensione di $U + W$, dove $W =< (2, 0, -4, -2), (0, 0, 1, 1) >$. $\boxed{2}$

(e) Si dica se W è un complemento diretto per U. $\boxed{1}$

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \\ (x, y, z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + 2z & 2x - 2y \\ x - 2y - 2z & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

(a) Si provi che f è un omomorfismo. $\boxed{2}$

(b) Si scriva la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. $\boxed{4}$

(c) Si determinino una base e la dimensione di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$. $\boxed{3}$

Esercizio 3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto ad una base opportuna, al variare di $k \in \mathbb{R}$, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -k & k & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino gli autovalori di A. $\boxed{3}$

(*b*) Si dica per quali valori del parametro k la matrice risulta diagonalizzabile. $\boxed{4}$

(*c*) Posto $k = 0$, si determinino una matrice diagonale D ed una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM = D$. $\boxed{5}$